الأعداد العقدية ...

تعريف: ندعو مجموعة جميع الثنائيات (x,y) حيث $R \ni x,y$

مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين بالشكل الآتي:

عملية الجمع: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

عملية الضرب: $(x_1, y_1) . (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

مجموعة الأعداد العقدية ونرمز لها بـ C

ندعو العدد الحقيقي x بالقسم الحقيقي للعدد العقدي z ونرمز له بـ

$$Re\, z = x$$

كما ندعو العدد الحقيقي y بالقسم التخيلي للعدد العقدي z ونرمز له بـ

$$IM\, z = y$$

تعريف: نقول عن العددين العقديين $z_1 = (x_1, y_1)$ و $Z_2 = (x_2, y_2)$ إنهما

متساويان إذا وفقط إذا كان $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

وبناء على هذا التعريف يكون $(x,y) = (0,0)$

$$x = 0 \wedge y = 0$$

وبما أنه $(x,y) = (x,0) + (0,y)$

وبما أنه $(0,y) = (0,1)(y,0)$

إذا اصطلحنا على أنه كل ثنائية من الشكل $(x,0)$ تعبر عن العدد الحقيقي x فعندئذ تكون مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العقدية أو نقول بأن مجموعة الأعداد العقدية هي الامتداد الطبيعي لمجموعة الأعداد الحقيقية

$$x_1 \cdot x_2 = (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2 - 0, 0 + 0)$$
$$= (x_1 x_2, 0) = x_1 \cdot x_2$$

$$x_1 + x_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0 + 0) = (x_1 + x_2, 0)$$
$$= x_1 + x_2$$

اذا رمزنا للعدد العقدي $(0,1)$ بـ i ونسميه بالوحدة التخيلية عندئذٍ

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$$

$$z = x + iy$$

وهو الشكل الديكارتي للعدد العقدي

حيث أن : $i^2 = i.i = (0,1).(0,1)$

$$= (0-1, 0+0) = (-1, 0) = -1$$

بناءً على الشكل الديكارتي

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + x_2 + iy_2$$

$$= x_1 + x_2 + i\, y_1 + y_2$$

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1).(x_2 + iy_2)$$

$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

خواص جبرية للأعداد العقدية:

1- يمكن الإثبات على أن $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2- يمكن الإثبات على أن $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

3- نعلم بأن العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في الساحة العقدية هو الصفر. وكذلك الأمر العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجمع في الساحة الحقيقية هو الصفر وذلك لأن $z + 0 = z$

4- لكل عدد عقدي z في الساحة العقدية معكوس بالنسبة لعملية الجمع والمعكوس للعدد العقدي z هو $-z$ وذلك لأن $z + (-z) = 0$

ملاحظة: من خلال مفهوم المعكوس الجمعي يمكن تعريف عملية الطرح بالساحة العقدية كما يلي: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

5- يمكن الإثبات على أنه $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$

6- يمكن الإثبات على أنه $z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$

7- نعلم بأن العنصر المحايد بالنسبة لعملية الجداء في الساحة الحقيقية هو 1 وكذلك الأمر العنصر المحايد في الساحة العقدية هو 1

$(x, y)(1, 0)$ $\qquad z . 1 = z$

$= (x - 0, 0 + y) = (x, y)$

8- لكل عدد عقدي غير صفري معكوس بالنسبة لعملية الجداء (نظير) فإذا كان z هو عدد عقدي غير صفري ورمزنا للمعكوس الضربي لهذا العدد بـ z^{-1}

$z = x + iy$

$-z = -x - iy$

عندئذ $z . z^{-1} = 1$

لإيجاد المعكوس الضربي للعدد العقدي $z = (x, y)$ لنفرض أن $z^{-1}(u, v)$

عندئذ $z . z^{-1} = 1$

$$(x, y)(u, v) = (1, 0)$$

$$(xu - yv, yu + xv) = (1, 0)$$

واستناداً إلى تعريف تساوي عددين عقديين ينتج أنه:

$$\begin{cases} xu - yv = 1 \\ yu + xv = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 \neq 0$$

وبالتالي لجملة هاتين المعادلتين حل وحيد هو

$$u = \frac{\Delta u}{\Delta} \qquad v = \frac{\Delta v}{\Delta}$$

$\Delta u = \begin{vmatrix} 1 & -y \\ 0 & x \end{vmatrix}$

$\Delta v = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix}$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

ملاحظة: عملية الترتيب ليس لها معنى بالساحة العقدية

وبالتالي فإن المعكوس الضربي للعدد العقدي غير الصفري $z = x + iy$

هو العدد $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

ملاحظة: من خلال خاصة المعكوس الضربي يمكن تعريف عملية القسمة في الساحة العقدية بالشكل الآتي:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

ومن خلال هذه العلاقة وبفرض أنه $z_1 = 1$ نجد أنه: $\frac{1}{z_2} = \frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} - i\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}$

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1}$$

التفسير الهندسي للأعداد العقدية:

إذا كان لدينا عدداً عقدياً $z = (x, y)$ أو $z = x + iy$

كل عدد عقدي يناظره نقطة من نقاط المستوي الإحداثي xoy وبالعكس كل نقطة من نقاط المستوي الإحداثي يقابلها عدد عقدي وحيد لذلك ندعو المحور الأفقي في المستوي الإحداثي بالمحور الحقيقي

أما المحور الشاقولي فندعوه المحور التخيلي والمستوي عندئذ المستوي العقدي ونرمز له بـ C

تعريف: ليكن لدينا العدد العقدي $z = x + iy$ إن طويلة أو مقياس العدد العقدي والذي نرمز له بـ $|z|$

وهو بالتعريف العدد الحقيقي غير السالب $\sqrt{x^2+y^2}$ أي أنه $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

والطرف الأيمن من العلاقة السابقة يمثل هندسياً البعد بين النقطة المناظرة العدد العقدي z ومبدأ الإحداثيات ومن هذا نستطيع القول بأن العدد العقدي يمثل هندسياً المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطة المناظرة للعدد العقدي

بشكل عام. إذا كان $z_1 = x_1 + iy_2$ و $z_2 = x_2 + iy_2$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_1)$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ونلاحظ من العلاقة السابقة أن مقياس العدد العقدي $z_1 - z_2$ يمثل البعد بين النقطتين المناظرتين للعددين العقديين z_1 و z_2

العدد العقدي المرافق :

ليكن لدينا العدد العقدي $z = x + iy$ ندعو بالتعريف العدد العقدي $x - iy$ بالعدد العقدي المرافق للعدد العقدي z ونرمز له بـ $\bar{z}$ أي أنه

$$\bar{z} = x - iy$$

ويمكن الإثبات على ما يلي :

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{(z_1 . z_2)} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad : z_2 \neq 0$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

وإذا كان $z = x + iy$ فعندئذٍ $\bar{z} = x - iy$

وبالتالي فإن $\bar{z} = x - iy$

$$z + \bar{z} = 2x \qquad x = Re\ z = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$z - \bar{z} = 2iy \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \qquad y = IM\ z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$z . \bar{z} = (x + iy)(x - iy)$$

$$= x^2 + y^2 = |z|^2$$

أي أن : $|z|^2 = z . \bar{z}$

ملاحظة: من خلال المفهوم المرافق للعدد العقدي يمكن إيجاد ناتج قسمة عددين عقديين وذلك بأنه نضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

مثال:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

يمكن الإثبات على أنه:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad ; z_2 \neq 0$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ المتراجحة المثلثية

لإثبات صحة 1)

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2)$$

$$= z_1 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (|z_1| \cdot |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونرفض السالب لأنه طويلة العدد العقدي هو عدد موجب

نحصل على المطلوب $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

لإثبات صحة 2)

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_1}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$$

Scanned by CamScanner

لإثبات صحة المتراجحة المثلثية لنذكر أولاً العلاقات الهامة:

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$x \leq |x| \leq \sqrt{\ }$

$$|z|^2 = (Re\, z)^2 + (Im)^2$$

$$Re\, z \leq |Re\, z| \leq |z|$$

$$Im\, z \leq |Im\, z| \leq |z|$$

لنثبت أنه صحة المتراجحة المثلثية:

نعلم أنه

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2).(\overline{z_1 + z_2})$$

$$= (z_1 + z_2).(\bar{z}_1 . \bar{z}_2)$$

$$= z.\bar{z}_1 + z_1.\bar{z}_2 + z_2.\bar{z}_1 + z_2.\bar{z}_2$$

$\bar{z}.\bar{z}_2 = \bar{z}_1\bar{z}_2$

$$(*) \quad = z.\bar{z}_1 + z_1.\bar{z}_2 + \overline{\bar{z}_1 . z_2} + z_2.\bar{z}_2$$

لكن

$$z_2.\bar{z}_2 = |z_2|^2 \quad , \quad z_1.\bar{z}_1 = |z_1|^2$$

$$z_1.\bar{z}_2 + \overline{z_1.\bar{z}_2} = 2Re(z.\bar{z}_2) ,$$

وبالاستفادة من المتراجحة $Re\, z \leq |Re\, z| \leq |z|$ نرى أنه

$$2Re(z_1.\bar{z}_2) \leq 2|z_1.\bar{z}_2| = 2|z_1|.|\bar{z}_2|$$

$$= 2|z_1|.|z_2|$$

$|\bar{z}| = |z|$

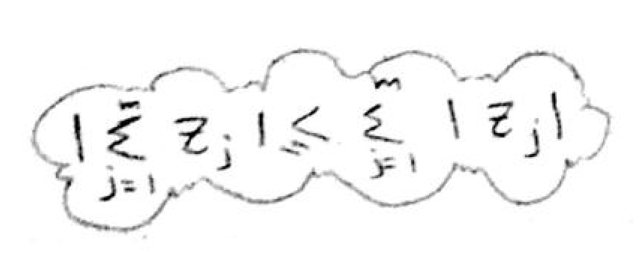
نعوض في (*)

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1|.|z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين (ورفض السالب)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

ونعمم هذه المتراجحة بالشكل التالي:



كما يمكن أن نثبت على أنه:

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

لإثبات ذلك

لدينا: $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$

أي أن: $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \le |z_1 - z_2| + |z_2|$

ومنه فإن

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \qquad (*)$$

ومن جهة ثانية

$$z_2 = z_2 - z_1 + z_1$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \le |z_2 - z_1| + |z_1|$$

$$|z_2| - |z_1| \le |z_2 - z_1|$$

لكن $|z_2 - z_1| = |-(z_1 - z_2)| = |-1| . |z_1 - z_2|$

$$= |z_1 - z_2|$$

$$|z_2| - |z_1| \le |z_1 - z_2|$$

$$-(|z_1| - |z_2|) \le |z_1 - z_2| \qquad (**)$$

من (*) ، (**) نستنتج أن

$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$$